L'Actualité économique

Espérance morale avec risque moral
Moral expectation with moral hazard

Jacques H. Drèze

Volume 63, numéro 2-3, juin–septembre 1987

Incertain et information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601409ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601409ar

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Citer cet article

Drèze, J. H. (1987). Espérance morale avec risque moral. *L'Actualité économique*, *63*(2-3), 40–57. https://doi.org/10.7202/601409ar

Résumé de l'article

Le terme « risque moral » est utilisé ici pour désigner les situations où un décideur unique choisit simultanément un « acte » (au sens de la théorie des jeux contre la nature, telle que développée notamment par L.J. Savage) et une « stratégie », non observable, susceptible d'influencer le cours des événements. Dans les nombreuses applications de la théorie de la décision à des situations de risque moral, on *suppose* que, pour chaque acte, le décideur choisit, dans un ensemble donné, la stratégie qui maximise l'espérance d'utilité. Les choix entre les actes reflètent alors les espérances d'utilité associées à ces stratégies optimales. On obtient ici une justification axiomatique de cette représentation, en affaiblissant l'axiome appelé « Inversion d'ordre » par Anscombe et Aumann. Aux termes de cet axiome, quand une épreuve aléatoire décide de l'acte qui prévaudra, il doit être indifférent pour le décideur que l'épreuve aléatoire soit conduite avant ou après que l'on observe l'état du monde. L'affaiblissement consiste à stipuler au contraire que le décideur ne *préfère jamais* strictement que l'épreuve aléatoire soit conduite *après* observation de l'état du monde *plutôt qu'avant* (i.e. la valeur de l'information est non négative). Conjointement avec les autres axiomes habituels, cet affaiblissement conduit à un théorème d'espérance morale généralisé : il existe un ensemble (convexe fermé) de probabilités *P* sur les états du monde, et une utilité sur les conséquences, tels que les préférences entre les actes reflètent les maxima par rapport à *P* des espérances d'utilité.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

ESPÉRANCE MORALE AVEC RISQUE MORAL*

Jacques H. DRÈZE
*Université Catholique de Louvain***

Le terme « risque moral » est utilisé ici pour désigner les situations où un décideur unique choisit simultanément un « acte » (au sens de la théorie des jeux contre la nature, telle que développée notamment par L.J. Savage) et une « stratégie », non observable, susceptible d'influencer le cours des événements. Dans les nombreuses applications de la théorie de la décision à des situations de risque moral, on *suppose* que, pour chaque acte, le décideur choisit, dans un ensemble donné, la stratégie qui maximise l'espérance d'utilité. Les choix entre les actes reflètent alors les espérances d'utilité associées à ces stratégies optimales. On obtient ici une justification axiomatique de cette représentation, en affaiblissant l'axiome appelé « Inversion d'ordre » par Anscombe et Aumann. Aux termes de cet axiome, quand une épreuve aléatoire décide de l'acte qui prévaudra, il doit être indifférent pour le décideur que l'épreuve aléatoire soit conduite avant ou après que l'on observe l'état du monde. L'affaiblissement consiste à stipuler au contraire que le décideur ne *préfère jamais* strictement que l'épreuve aléatoire soit conduite *après* observation de l'état du monde *plutôt qu'avant* (i.e. la valeur de l'information est non négative). Conjointement avec les autres axiomes habituels, cet affaiblissement conduit à un théorème d'espérance morale généralisé : il existe un ensemble (convexe fermé) de probabilités P sur les états du monde, et une utilité sur les conséquences, tels que les préférences entre les actes reflètent les maxima par rapport à P des espérances d'utilité.

Moral expectation with moral hazard. — The words « moral hazard » are used here to denote situations where the decision-maker chooses simultaneously an « act » (as defined in the theory of games against nature, developed in particular by L.J. Savage) and an unobserved « strategy » susceptible of influencing the course of events. In applied work on moral hazard, it is *assumed* that, for each act, the decision-maker chooses, from

---

* Traduction et adaptation (par l'auteur) de « Moral Expectation with Moral Hazard », pp. 197-204 in *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard Debreu*, édité par W. Hildenbrand et A. Mas-Colell, Amsterdam, North-Holland, 1986. J'ai tiré profit d'échanges de vue avec Robert Aumann, Claude d'Aspremont, Yossi Greenberg, Heraklis Polemarchakis et Shmuel Zamir, et des commentaires de Georges Dionne et Ngo van Long sur une version antérieure. Les idées de base contenues dans ce texte et dans son complément - Drèze (1987) - ont été développées à la fin des années 50. J'ai alors bénéficié de plusieurs discussions avec le regretté L. Jimmy Savage, des conseils avisés de mon directeur de thèse William Vickrey, et d'une initiation très éclairante à la théorie de l'utilité par Gérard Debreu.

** Center for Operations Research and Econometrics, Louvain-la-Neuve Belgique.

a given set, the strategy which maximises expected utility. *Preferences among acts are then isomorphic with expected utilities under the maximising strategies.* An axiomatic justification of that representation is obtained here by weakening the axiom called « Reversal of order » by Anscombe and Aumann. Under that axiom, when a random device is to decide which of two acts obtains, the device may *indifferently* be activated before or after observing the true state. The weakening consists in stipulating instead that the decision-maker *never prefers* strictly that the device be activated *after* observing the true state *instead of beforehand* (i.e. the value of information is non-negative). Together with the other standard axioms, this weakening leads to a generalised moral expectation theorem : there exist a (closed convex) set of probability measures P on the states of the world, and a utility on consequences, such that preferences among acts are isomorphic with the maxima over P of the expected utilities.

---

1. INTRODUCTION

Dans la théorie contemporaine de *l'utilité*, telle que developpée par von Neumann et Morgenstern (1947) et leurs disciples, on considère un ensemble de prix - disons l'ensemble fini B d'éléments b_q, $q = 1 \ldots t$. On définit ensuite des prix mixtes, à l'aide de vecteurs de probabilités β associés à B. Enfin, on observe les choix d'un décideur entre ces prix mixtes. Lorsque ces choix sont conformes à trois axiomes élémentaires (ordre complet, indépendance et continuité - *cf* section 3), alors il existe une fonction réelle u sur B, appelée utilité, telle que les choix entre prix mixtes reflètent leurs espérances d'utilité. En d'autres termes, le prix mixte β est préféré au prix mixte β' si et seulement si

$$\sum_q \beta(b_q)u(b_q) > \sum_q \beta'(b_q)u(b_q). \tag{1}$$

Dans la théorie contemporaine des *jeux contre la nature*, telle que développée par Savage (1954) et ses disciples, on considère un ensemble d'états du monde, - disons l'ensemble fini[1] S, d'éléments $s^1 \ldots s^n$ mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs. Considérant à nouveau un ensemble B de prix (« conséquences »), on appelle actes f, f', ..., des applications de S dans B - c'est-à-dire des vecteurs de prix associés aux états du monde (au lieu des vecteurs de probabilité associés aux prix, intervenant dans la théorie de l'utilité). On observe ensuite les choix d'un décideur entre les actes. Lorsque ces choix sont conformes à certains axiomes (considérés plus loin), il existe une utilité u sur B, et une probabilité (subjective) p sur S, tels que les choix entre les actes reflètent leurs espérances (subjectives) d'utilité. Soit $b(f, s^m)$ le prix associé avec l'état s^m par l'acte f ; alors l'acte f est préféré à l'acte f' si et seulement si

$$\sum_m p^m u(b(f,s^m)) > \sum_m p^m u(b(f',s^m)). \tag{2}$$

De la sorte, la théorie de Savage *étend* celle de von Neumann et Morgenstern à des événements pour lesquels on ne dispose pas d'une probabilité objective. En

---

1. Un ensemble fini est retenu ici pour la commodité d'un exposé non technique. Une présentation rigoureuse de la théorie fait intervenir des partitions arbitrairement finies de S, ou bien (comme à la section 4) des actes mixtes.

outre, elle la *confirme* en montrant que des probabilités numériques apparaissent naturellement dans une approche cohérente des décisions dans l'incertain.

Cette remarque suggère une présentation séquentielle des théories de l'utilité et de la probabilité subjective. Dans un premier temps, on utilise deux prix (par exemple, b_1 = statu quo et b_2 = statu quo plus $ 100) pour définir des actes en associant l'un ou l'autre prix aux réalisations d'un *mécanisme aléatoire* (roulette, cartes, dés,...). À partir des axiomes de Savage appliqués aux choix entre ces actes, on obtient des probabilités numériques pour ces réalisations aléatoires.

Dans un second temps, on utilise *les probabilités du premier temps* pour construire des prix mixtes (faisant intervenir tous les éléments de B) et développer la théorie de l'utilité. La troisième étape conduit alors aux probabilités subjectives. Cette étape est aisée, quand on dispose déjà des probabilités numériques de réalisations aléatoires. Pour chaque état s^m, on identifiera une réalisation aléatoire (de probabilité connue) telle que le décideur parie indifféremment sur s^m ou sur cette réalisation aléatoire. Cette procédure élémentaire est bien définie, pour autant que la propriété d'indifférence soit invariante par rapport aux enjeux. « Le choix de faire dépendre un prix d'un événement ou d'un autre ne peut dépendre du prix lui-même » ; Savage (1954, p. 13).

Intuitivement, cette exigence comporte deux aspects. Primo, la probabilité subjective d'un événement doit être stable, indépendante du prix (de la pénalité) associé à cet événement ; sinon, on se trouve en situation de « risque moral ». Secundo, l'utilié d'un prix doit être stable, indépendante de l'événement qui se réalise, sinon, on se trouve en situation de « préférences liées aux états ». Dans le cadre de la présentation séquentielle de la théorie, chacun des deux aspects est couvert par un axiome simple et convaincant ; cela ressort clairement de l'élégante « Définition de la Probabilité Subjective » par Anscombe et Aumann (1963), reprise en section 4.

Un petit exemple permet d'illustrer les deux conditions, et leur traduction axiomatique. Un archer doit participer à une épreuve olympique, avec de réelles chances de gagner. Considérons les deux événements « gagner » et « perdre » (*i.e.* ne pas gagner). Soit que l'archer se révèle indifférent entre le fait de miser $ 100 sur « gagner », sur « perdre » ou sur « face » dans un jeu de pile ou face. Peut-on en conclure qu'il miserait indifféremment $ 100 000 sur l'un quelconque des trois événements ? Non sequitur.

Primo, un prix de $ 100 000 en cas de perte *pourrait* inciter l'archer à viser à côté pour être certain de perdre. Si cette perspective l'attire davantage que le fait de miser sur « face » ou sur « gagner », nous sommes en situation de risque moral.

L'axiome qui exclut le risque moral se présente comme suit. Annonçons à l'archer qu'il aura une chance de gagner un prix de $ 100 000 ; un jeu de pile ou face doit encore décider si le prix sera lié à « gagner » ou à « perdre ». Importe-t-il, à son point de vue, que le jeu de pile ou face se déroule avant ou après l'épreuve olympique ?[2] Si l'archer *insiste* pour que le jeu se déroule *avant* l'épreuve, on pourra supposer qu'il compte viser en fonction du prix ; il y a risque moral, et sa probabilité (subjective) de gagner dépendra de l'affectation du prix. Un axiome simple, qui exclut le risque moral, est appelé par Anscombe et Aumann « Inversion d'ordre ». Quand une épreuve aléatoire décide de l'acte qui prévaudra, il doit être indifférent pour le décideur que l'épreuve aléatoire soit conduite avant ou après que l'on observe l'état du monde.

Secundo, gagner l'épreuve olympique pourrait changer la vie de l'archer du tout au tout - par exemple, transformer un heureux professeur d'éducation physique en un riche producteur d'articles de sport. Cette mutation *pourrait* affecter profondément son *attitude à l'égard* de la richesse - par exemple, transformer une profonde aversion au risque en une grande tolérance au risque. Si en conséquence, il préfère miser $ 100 000 sur « gagner » que sur « perdre » ou sur « face », ses préférences sont liées aux états.

L'axiome qui exclut les préférences liées aux états est bien connu. Il requiert l'élicitation des préférences pour les prix (mixtes) *conditionnellement* à chaque état, et il impose que ces préférences conditionnelles soient toutes identiques. Ainsi, on pourrait annoncer à l'archer que le prix de $ 100 est remplacé par un prix mixte, de $ 20 ou $ 200 avec égales probabilités. S'il est indifférent entre ce prix mixte et le prix de $ 100 quand le prix est lié à « gagner », cette indifférence doit se maintenir (dit l'axiome) quand le prix est lié à « perdre » ou à « face ».

Cet article a pour objet de présenter, en termes simples (du moins je l'espère), une extension de la théorie des jeux contre la nature aux situations de risque moral. Cette extension a été élaborée pour la première fois dans ma thèse de doctorat en 1958 et dans un article de 1961. Une présentation plus détaillée, et une extension parallèle au cas des préférences liées aux états, se trouvent dans Drèze (1987), dont le présent article est extrait.

Le terme « risque moral » est utilisé ici pour désigner un ensemble de situations où le décideur choisit simultanément un acte, tel que défini ci-dessus, et une « stratégie » susceptible d'influencer le cours des événements. Ces situations recouvrent notamment les « jeux de force et d'adresse », dans la terminologie de von Neumann et Morgenstern (1947). Le terme « risque moral » (ou « hasard

2. L'importance du report dans le temps d'une épreuve aléatoire ressort clairement dans l'exemple réel que me rappelait Yossi Greenberg. Lorsque les déclarations à l'impôt sont vérifiées par échantillonnage, on procède au tirage de l'échantillon *après* la rentrée des déclarations. Et pourtant, il serait plus « efficace » d'avertir les contribuables au préalable. Ainsi ceux dont les déclarations seront contrôlées produiraient des justifications détaillées, facilitant les contrôles ; tandis que les autres pourraient se contenter de justifications sommaires, gagnant du temps... .

moral » en franglais) vient de la littérature sur les assurances, où l'on reconnaît que « la couverture d'un risque peut changer le comportement de l'assuré et donc les probabilités utilisées dans le calcul actuariel. Ainsi, une assurance incendie pour une somme dépassant la valeur du bien peut inviter à la négligence, sinon à la pyromanie » - Arrow (1965, p. 142).

Je ne connais pas d'autres développements axiomatiques de la théorie de la décision avec risque moral. Par contre, les applications ne manquent pas[3]. Elles reposent sur des modèles où le décideur dispose d'un ensemble de stratégies, disons Σ d'éléments σ, σ' ... À chaque stratégie σ de Σ est associée une probabilité p_σ sur S. On *suppose* alors que le décideur choisit, pour chaque acte, la stratégie (optimale) qui maximise l'espérance d'utilité. Les choix entre les actes reflètent alors les espérances d'utilités *sous une stratégie optimale*. En d'autres termes, l'acte f est préféré à l'acte f' si et seulement si

$$\max_{\sigma\in\Sigma} \sum_m p_\sigma^m u(b(f,s^m)) > \max_{\sigma'\in\Sigma} \sum_m p_{\sigma'}^m u(b(f',s^m)). \tag{3}$$

L'inégalité (3) traduit une extension du principe de maximisation de l'espérance d'utilité, du domaine des jeux contre la nature (choix d'un acte) au domaine du risque moral (choix simultané d'un acte et d'une stratégie).

Cette extension est souvent utilisée implicitement dans la théorie des *jeux de stratégie*, où l'on suppose continuellement que les joueurs maximisent leur expérance d'utilité, à la fois en choisissant leurs stratégies (ces choix tiennent naturellement compte de l'interaction entre les joueurs) et en choisissant des jeux ou des paiements[4].

Il est surprenant que la règle (3) soit systématiquement appliquée *sans justification spécifique*, comme si elle découlait implicitement des axiomes définissant un comportement cohérent dans les jeux contre la nature. Manifestement, si tel était le cas, le lien logique mériterait d'être explicite ; dans le cas contraire, il vaut la peine de présenter un jeu d'axiomes conduisant à la règle (3).

Dans mes « travaux de jeunesse » - Drèze (1958, 1961) -, place est faite au risque moral en remplaçant l'axiome d'« Inversion d'Ordre » par la version affaiblie que voici : quand une épreuve aléatoire décide de l'acte qui prévaudra, le décideur ne *préfère jamais* (strictement) que l'épreuve aléatoire soit conduite *après* observation de l'état du monde *plutôt qu'avant*. Ainsi, l'archer de mon exemple, apprenant qu'un jeu de pile ou face décidera si le prix de $ 100 000 est lié à « gagner » ou à « perdre », ne devrait pas *insister* pour que la pièce soit lancée *après* l'épreuve olympique. Je montre à la section 5 que l'axiome affaibli, conjointement avec les axiomes de la théorie de l'utilité et l'axiome de préférences indépendantes de l'état du monde, engendre la règle (3) : il existe

3. *Cf, e.g.*, Dionne (1982), et les références citées *ibidem*.

4. *Cf, e.g.*, Luce et Raiffa (1958, chap. 3).

un ensemble (convexe fermé) de probabilités P sur S, et une utilité u sur B, tels qu'un acte f est préféré à un acte f' si et seulement si

$$\max_{p \in P} \sum_m p^m u(b(f,s^m)) > \max_{p' \in P} \sum_m p'^{\,m} u(b(f',s^m)). \tag{4}$$

Ce résultat (énoncé rigoureusement et prouvé au théorème 3 ci-dessous) fournit les fondements axiomatiques attendus pour les applications faisant intervenir le risque moral[5].

Cette introduction se terminera sur quelques commentaires à propos des concepts de base et de leur interprétation. Ces concepts sont les états et les événements, les prix et prix mixtes, et les jeux ou jeux mixtes appelés « loteries ».

Un événement est une circonstance quelconque pouvant faire l'objet d'un pari. Donc, la définition d'un événement doit être vérifiable avec objectivité interpersonnelle. Mais la description de l'événement peut inclure des activités du décideur lui-même (telles le fait qu'il court un mille en 7 minutes, se trouve en un certain endroit à un moment donné,...), ou des circonstances influencées par des modalités non observables de son comportement (telles son succès dans une épreuve de tir à l'arc, sa survie pendant une certaine période,...). La possibilité de vérification objective rend le concept opérationnel.

Un événement qui n'est pas l'union d'autres événements est un état. Autrement dit, il existe une partition de l'ensemble des événements plus fine que toutes les autres, et ses éléments (les « événements élémentaires ») sont appelés états.

Il y a un ensemble de prix, et chaque prix peut être associé avec n'importe quel état (dans le cadre des paris). Il est naturel de considérer des prix constitués par des paniers de biens ou des sommes d'argent ; toutefois, comme les préférences entre les prix seront supposées indépendantes des états, un concept « englobant » s'impose, tout comme pour les « conséquences » de Savage (1954, p. 13) : « tout ce qui peut arriver au décideur est une conséquence » ; je renvoie à Drèze (1987) pour l'extension à des préférences liées aux états, qui laisse toute latitude pour la définition des prix.

Par souci de facilité, j'utilise un ensemble fini de prix, et j'introduis la continuité à l'aide de *distributions de probabilités sur l'ensemble des prix, appelées « prix mixtes »*.

Un jeu est une fonction associant un prix mixte avec chaque état. Le terme « jeu » remplace le terme « acte » pour évoquer le fait que le décideur choisit parallèlement une « stratégie » (non observée), dans les situations de risque moral. Le terme « jeu » est donc une abréviation de « jeu contre la nature avec

5. La portée de ce résultat pour la théorie des jeux de stratégie, où il est parfois raisonnable de préférer strictement retarder la communication du résultat d'une épreuve aléatoire, est évoquée dans Drèze (1987, section 9.4)

risque moral ». Quant aux stratégies, elles n'entrent pas dans le système formel, elles interviennent seulement dans des interprétations heuristiques, pour guider l'intuition.

Selon la définition d'un jeu, l'épreuve aléatoire sélectionnant un prix spécifique à partir du prix mixte associé à un état, est conduite *après observation de l'état qui se réalise.* Par contre, quand on considère une distribution de probabilités sur les jeux, appelée *loterie*, l'épreuve aléatoire sélectionnant un jeu spécifique à partir de la loterie est conduite *immédiatement.* La distinction entre information immédiate et différée concernant une épreuve aléatoire est très importante, ainsi qu'en témoignait mon exemple. Cette distinction se retrouve dans la notation introduite à la section 2.

La théorie de l'utilité est introduite à la section 3 pour des distributions de probabilités sur les jeux (des loteries). Les trois axiomes élémentaires de la théorie sont tout à fait convaincants dans ce cadre. Le théorème de von Neumann et Morgenstern affirme l'existence *d'une fonction définie sur l'ensemble des jeux*, appelée ici « valeur », telle que les choix entre les loteries reflètent leurs « valeurs espérées ». Ce résultat sert de tremplin pour le développement séquentiel de la théorie, qui couvre successivement les « jeux contre la nature » (section 4) et les « jeux avec risque moral » (section 5).

La gamme de situations couverte par une théorie se déduit en fin de compte de la plausibilité des hypothèses dans un contexte donné. La théorie présentée ici ne couvre pas les situations de jeux les plus générales (les jeux de stratégie), parce que l'hypothèse de valeur non négative de l'information n'est pas plausible dans ce contexte général. Deux autres types de situations évoquées occasionnellement sous le couvert de risque moral ne cadrent pas avec mon modèle : les situations où les « stratégies » sont un objet de préférences *en elles-mêmes*, et non en raison de leur influence sur les prix et les états[6] ; et les situations où l'ensemble des « stratégies » réalisables dépend des prix[7]. La possibilité d'étendre le modèle à de telles situations est discutée dans Drèze (1987, sections 9-3 à 9-5).

2. LE MODÈLE ET LA NOTATION

L'ensemble S des *états* comporte un nombre fini d'éléments $s^1 \ldots s^m \ldots s^n$. Les sous-ensembles (*événements*) sont désignés par S^A, S^B,... Le complément de S^A dans S s'écrit $S^{\sim A}$ *; le complément de* s^m s'écrit $S^{\sim m}$.

On se donne un ensemble fini[8] B de *prix* b_0, $b_1 \ldots b_q \ldots b_t$. L'ensemble B contient au moins deux éléments distincts, disons b_0 et b_1.

6. De telles situations surgissent, par exemple, dans les problèmes de relations entre mandant et mandataire (« principal-agent ») où l'effort n'est pas observé.

7. Pensons à un archer « nerveux » dont les tirs perdent en précision lorsque les enjeux sont élevés.

8. Il reviendrait au même de se donner un ensemble infini de prix, mais de n'utiliser que des probabilités simples sur cet ensemble. J'ai une prédilection pour les ensembles finis.

Une distribution de probabilités sur les prix, ou *prix mixte*, est définie par une probabilité β sur B. On désigne par $\mathbb{B}$ l'ensemble de ces probabilités. Des éléments spécifiques de $\mathbb{B}$ seront identifiés par des indices.

L'ensemble $\mathbb{B}$ est fermé pour des compositions (finies) de probabilités : pour tous β et β' dans $\mathbb{B}$ et α dans $[0,1]$, la probabilité $\alpha\beta + (1 - \alpha)\beta'$ appartient à $\mathbb{B}$. Suivant Luce et Raiffa (1958) ou Fishburn (1962), j'écrirai aussi $\beta\alpha\beta'$ pour $\alpha\beta + (1 - \alpha)\beta'$ et noterai que $\mathbb{B}$ est un « ensemble mixte » (*mixture set*)[9].

Un *jeu* est une application de S dans $\mathbb{B}$, qui associe un prix mixte avec chaque état. L'ensemble des jeux est désigné par G, d'éléments $g_0, g_1 \ldots g_h, g_i \ldots$. J'écrirai β_h^m pour le prix mixte associé avec l'état s^m par le jeu g_h, $m = 1 \ldots n$. Donc, $g_h := (\beta_h^1, \ldots \beta_h^n)$ et $G := \mathbb{B}^n$.

La définition d'un jeu doit se comprendre comme suit : *après observation de l'état, une épreuve aléatoire sélectionnera un prix* dans B - selon la probabilité β_h^m, dans le cas du jeu g_h et de l'état s^m.

Il est parfois commode de décrire un jeu succintement en écrivant $g_h := (\beta_h^m, \beta_h^{\sim m})$, où $\beta_h^{\sim m}$ désigne le (n-l)-uple de prix mixtes $(\beta_h^1 \ldots \beta_h^{m-1},\ \beta_h^{m+1} \ldots \beta_h^n)$. Par extension, j'écrirai $(\beta, \beta_h^{\sim m})$ pour désigner un jeu associant le prix mixte β avec s^m et les mêmes prix mixtes que g_h avec les autres états.

Un *jeu constant* associe le même prix mixte avec tous les états. Donc, g_h est constant si $\beta_h^l = \beta_h^m$ pour tous l, $m = 1 \ldots n$.

Une distribution de probabilités sur les jeux, appelée ici *loterie*, est définie par une probabilité simple γ sur G ; c'est-à-dire par une probabilité γ sur G telle que $\gamma(g_h) \neq 0$ pour un nombre fini d'éléments g_h de G. Le terme loterie a toujours dans ce texte, le contenu technique précis défini ici[10]. L'ensemble des loteries est désigné par Γ, d'éléments $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots$.

L'ensemble Γ est fermé pour des compositions (finies) de probabilités et est lui aussi un ensemble mixte.

La définition d'une loterie doit se comprendre comme suit : dans le cadre de la loterie γ, *une épreuve aléatoire sélectionnera immédiatement un jeu* dans G, selon la probabilité γ ; ensuite, après observation de l'état, une épreuve aléatoire sélectionnera un prix dans B, selon la probabilité β_h^m dans le cas du jeu g_h et de l'état s^m.

Ces définitions attribuent un rôle important à l'échéancier de l'information. A chaque loterie γ, correspond *numériquement* un jeu complètement défini, obtenu en reportant l'épreuve aléatoire γ après l'observation de l'état. Ce jeu

---

9. Donc, pour tout λ dans $[0,1]$, $(\beta\alpha\beta')\lambda\beta' \equiv \beta(\alpha\lambda)\beta'$.

10. Je m'écarte donc de la terminologie d'Anscombe et Aumann (1963, 200-201), qui appellent mes prix mixtes « loteries de casino » (« roulette lotteries »), mes jeux « loteries de champ de courses composées » (*composite horse lotteries*) et mes loteries « loteries de casino dont les prix sont des loteries de champ de course composées ».

est désigné par g_γ et appelé « le jeu *correspondant* à la loterie γ ». Il se définit comme suit (Σ_h désignant l'intégrale par rapport à la *mesure simple* γ, sur l'ensemble G d'élément générique g_h) :

Définition 1. *Le jeu g_γ correspondant à la loterie γ est défini par :*

$$g_\gamma := (\beta_\gamma^1 \ldots \beta_\gamma^n) \text{ où } \beta_\gamma^m = \sum_h \gamma(g_h)\beta_h^m,\ m = 1 \ldots n.^{11} \tag{5}$$

La loterie assignant aux jeux g_h et g_i les probabilités respectives α et $1 - \alpha$ sera désignée par $g_h \alpha g_i$. Le jeu correspondant à cette loterie s'écrira donc $g_{g_h \alpha g_i}$. Lorsque je m'attache à l'état s^m, j'écris $g_h := (\beta_h^m, \beta_h^{\tilde{m}})$, $g_i := (\beta_i^m, \beta_h^{\tilde{m}})$. Dès lors,

$$g_h \alpha g_i := (\beta_h^m, \beta_h^{\tilde{m}})\, \alpha\, (\beta_i^m, \beta_i^{\tilde{m}}),$$

et, en vertu de (5),

$$g_{g_h \alpha g_i} := g_{(\beta_h^m, \beta_h^{\tilde{m}})\, \alpha\, (\beta_i^m, \beta_i^{\tilde{m}})} \equiv (\beta_h^m \alpha \beta_i^m,\ \beta_h^{\tilde{m}} \alpha \beta_i^{\tilde{m}}). \tag{6}$$

Je souligne avec insistance que

$$(\beta_h^m, \beta_h^{\tilde{m}})\alpha(\beta_i^m, \beta_i^{\tilde{m}}) \not\equiv (\beta_h^m \alpha \beta_i^m,\ \beta_h^{\tilde{m}} \alpha \beta_i^{\tilde{m}}). \tag{7}$$

En effet, la *loterie* du membre de gauche conduit à un tirage *immédiat* entre g_h (avec probabilité α) et g_i ; tandis que le *jeu* du membre de droite conduit au tirage composé, *après observation de l'état*, d'un prix dans B - avec la probabilité $\beta_h^l \alpha \beta_i^l = \alpha \beta_h^l + (1 - \alpha)\beta_i^l$ dans le cas de l'état s^l.

Dans la théorie présentée ici, les loteries constituent le seul objet de choix. Je supposerai que le décideur a des préférences, observables, entre les loteries. La théorie repose sur ces préférences, et *uniquement sur elles*.

Quand γ n'est pas préférée à γ', j'écris $\gamma \lesssim \gamma'$. En cas d'indifférence ($\gamma \lesssim \gamma'$ et $\gamma' \lesssim \gamma$), j'écris $\gamma \sim \gamma'$. En cas de préférence stricte, j'écris $\gamma < \gamma'$.

Ma notation réserve les lettres grecques pour les probabilités, à l'exception de ι (iota) qui désigne le vecteur $(1, \ldots 1)$ dont tous les éléments sont égaux à l'unité, et de δ^m qui désigne le vecteur de Kronecker $(0, \ldots 1, \ldots 0)$ dont l'élément m est égal à l'unité. Les intervalles fermés et ouverts sont désignés par [,] et (,) respectivement. Les produits scalaires sont identifiés par un point, par exemple $p.c = \Sigma_l\, p^l c^l$.

3. LE THÉORÈME DE VON NEUMANN ET MORGENSTERN

Dans tout le texte, je suppose *sans rappel* que les préférences *entre les loteries* sont conformes aux axiomes de von Neumann et Morgenstern (1947), que j'énoncerai comme suit[12]:

11. Donc, β_γ^m est la distribution marginale sur B induite par γ si s^m se réalise. Dans Drèze (1958, 1961), j'appelais γ une « loterie immédiate » et g_γ « la loterie différée correspondante ». La terminologie retenue ici est plus simple : toutes les loteries sont tirées immédiatement, tous les jeux comportent des tirages différés.

12. Voir aussi Fishburn (1982, section 2.2).

PO *(Ordre faible)*. (i) Pour tous γ, γ' dans Γ, soit $\gamma \precsim \gamma'$, soit $\gamma' \precsim \gamma$; et (ii) pour tous $\gamma, \gamma', \gamma''$ dans Γ, si $\gamma \precsim \gamma'$, et $\gamma' \precsim \gamma''$, alors $\gamma \precsim \gamma''$.

PI *(Indépendance)*. Pour tous $\gamma, \gamma', \gamma''$ dans Γ, pour tout α dans $(0,1]$, $\gamma\alpha\gamma'' \precsim \gamma'\alpha\gamma''$ si et seulement si $\gamma \precsim \gamma'$.

PC *(Continuité)*. Pour tous $\gamma, \gamma', \gamma''$ dans Γ, si $\gamma \prec (\succ) \gamma'$, alors il existe α dans $[0,1)$ tel que $\gamma\alpha\gamma'' \prec (\succ) \gamma'$.

Le théorème bien connu de von Neumann et Morgenstern (1947) sur « l'espérance d'utilité » découle de ces axiomes. Entendant réserver le terme « utilité » pour une fonction définie sur l'ensemble B des prix, je reprendrai la terminologie de Drèze (1961) et appelerai *valeur* une fonction sur les *jeux*, dont l'espérance reflète ces préférences entre les loteries.

Théorème 1. *Sous PO, PI, PC, il existe une fonction réelle V définie sur G à une transformation linéaire positive près, telle que* $\gamma \precsim \gamma'$ *si et seulement si* $\Sigma_h \gamma(g_h)\, V(g_h) \leq \Sigma_h \gamma'(g_h)\, V(g_h)$.

Parce que les jeux sont des loteries particulières (dégénérées), les préférences entre les loteries induisent des préférences entre les jeux. De même, les préférences entre jeux constants induisent des préférences entre prix mixtes ; plus précisément, entre ces prix mixtes *offerts avec certitude*, indépendamment de l'état qui se réalise. Enfin, les prix sont des prix mixtes particuliers (dégénérés). Ainsi, les préférences entre les prix mixtes induisent des préférences entre les prix. Toutes ces préférences sont des ordres faibles, en vertu de PO. Elles seront représentées par les mêmes symboles $\precsim$, $\prec$ et $\sim$. Donc, $g_h \precsim g_i$, $\beta \precsim \beta'$ ou $b_q \precsim b_r$ sont des particularisations en chaîne de la relation de préférence primitive $\gamma \precsim \gamma'$. Ces particularisations se combinent dans les relations $g_h \precsim \gamma$, $\beta \precsim \gamma$, etc... . De même, les valeurs de jeux constants s'interprètent comme valeurs des prix mixtes (ou des prix) correspondants, offerts avec certitude. Ces valeurs s'écrivent donc $V(\beta)$ ou $V(b_q)$.

4. LE THÉORÈME D'ANSCOMBE ET AUMANN

À partir de probabilités numériques et du théorème de von Neumann et Morgenstern, Anscombe et Aumann (1963) déduisent le théorème de Savage de deux axiomes supplémentaires, qu'ils appellent « monotonicité » et « inversion d'ordre », respectivement. Dans la notation adoptée ici, ces deux axiomes s'énoncent comme suit:

Axiome 1 *(Monotonicité)*. Soit que les jeux g_h et g_i vérifient $\beta_h^{\sim m} = \beta_i^{\sim m}$; alors $\beta_h^m \precsim \beta_i^m$ entraîne $g_h \precsim g_i$.

Axiome 2 *(Inversion d'ordre)*. Toute loterie est indifférente au jeu correspondant; autrement dit, pour tout γ dans Γ, $\gamma \sim g_\gamma$.

L'axiome 2 traduit formellement l'idée que le report du tirage d'une loterie n'affecte pas la préférence, en l'absence de risque moral.

Pour plus de clarté, je remplacerai l'axiome 1 par une formulation alternative, plus faible, mais *équivalente sous l'axiome* 2. Cette formulation repose sur deux définitions usuelles.

Définition 2. *(Préférences conditionnelles).* Pour tout s^m dans S et tous β,β' dans $\mathbb{B}$: (i) $\beta < \beta'$ s^m *étant donné* si et seulement si il existe un (g_h dans G avec) $\beta_h^{\tilde{}m}$ tel que $(\beta,\beta_h^{\tilde{}m}) < (\beta',\beta_h^{\tilde{}m})$; (ii) $\beta \sim \beta'$ s^m *étant donné* si et seulement si ni $\beta < \beta'$ s^m étant donné ni $\beta' < \beta$ s^m étant donné.

Définition 3. L'état s^m de S est *nul*, si et seulement si $\beta \sim \beta'$ s^m étant donné pour *tous* β,β' dans $\mathbb{B}$.

Axiome 3. *(Préférences indépendantes des états).* Pour tous s^l, s^m dans S et pour tous β,β' dans $\mathbb{B}$, si $\beta < \beta'$ s^m étant donné, alors il n'est pas vrai que $\beta' < \beta$ s^l étant donné.

L'axiome 3 énonce que les préférences conditionnelles *ne se renversent pas* quand les mêmes prix mixtes sont associés avec des états alternatifs. Mais la préférence stricte conditionnellement à certains états n'exclut pas l'indifférence conditionnellement à d'autres états (à des états nuls, en particulier).

Pris isolément, l'axiome 3 entraîne la monotonicité faible[13].

Lemme 1. *Sous l'axiome 3, pour tous g_h, g_i dans G, si $\beta_h^m \lesssim \beta_i^m$ s^m étant donné pour tout s^m dans S, alors $g_h \lesssim g_i$.*

Preuve. *Soit* g_h et g_i donnés. Pour chaque $m = 1 \ldots n$, on définit un jeu $\tilde{g}_m$ par

$$\tilde{\beta}_m^l = \beta_h^l \text{ pour } l = 1 \ldots m$$
$$= \beta_i^l \text{ pour } l = m+1, \ldots, n.$$

Puisque $\beta_h^m \lesssim \beta_i^m$ s^m étant donné pour tout s^m dans S, il découle de la définition 2 et de l'axiome 3 que $\tilde{g}_1 \lesssim g_i$ et que pour tout $m = 2 \ldots n$,

$$\tilde{g}_m = (\beta_h^1 \ldots \beta_h^{m-1}, \beta_h^m, \beta_i^{m+1} \ldots \beta_i^n)$$
$$\lesssim (\beta_h^1 \ldots \beta_h^{m-1}, \beta_i^m, \beta_i^{m+1} \ldots \beta_i^n) = \tilde{g}_{m-1}.$$

En effet, si $\beta_h^m \sim \beta_i^m$ s^m étant donné, alors la définition 2 (ii) entraîne $\tilde{g}_m \sim \tilde{g}_{m-1}$ (ou $\tilde{g}_1 \sim g_i$ si $m = 1$) ; si $\beta_h^m < \beta_i^m$, alors l'axiome 3 entraîne $\tilde{g}_m \lesssim \tilde{g}_{m-1}$ (ou $\tilde{g}_1 \lesssim g_i$ si $m = 1$). En conséquence, $g_h = \tilde{g}_n \lesssim \tilde{g}_{n-1} \ldots \lesssim \tilde{g}_1 \lesssim g_i$. ■

La monotonicité faible du lemme 1 est moins forte que la monotonicité de l'axiome 1 parce que le lemme 1 ne relie pas les préférences conditionnelles à un état s^m aux préférences inconditionnelles. Le lemme 2 y pourvoit.

---

13. Le lemme 1 correspond au théorème 2 de Savage (1954, p. 24), obtenu comme corollaire du « Principe de la chose sûre ». Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'étape (2) de la preuve du lemme 2 ci-dessous, on vérifie aisément que l'axiome 2 *pris isolément* entraîne que les préférences conditionnelles à s^m induisent un ordre faible sur $\mathbb{B}$.

Lemme 2. *Sous les axiomes 2 et 3, pour tous* β, β' *dans* $\mathbb{B}$, $\beta \lesssim \beta'$ *entraîne* $\beta \lesssim \beta'$ s^m *étant donné pour tout* s^m *dans S.*

Preuve.

(1) Soit $\beta \prec \beta'$. S'il existe s^m dans S avec $\beta \succ \beta'$ s^m étant donné, alors $\beta \gtrsim \beta'$ s^l étant donné pour tout s^l dans S en vertu de l'axiome 3, et $\beta \gtrsim \beta'$ en vertu du lemme 1, contredisant $\beta \prec \beta'$.

(2) Soit donc $\beta \sim \beta'$. S'il existe s^m dans S avec $\beta \succ \beta'$ s^m étant donné, alors il existe (un jeu g_h dans G avec) $\beta_h^{\sim m}$ tel que $(\beta,\beta_h^{\sim m}) \succ (\beta',\beta_h^{\sim m})$. Il découle alors de PI que $(\beta,\beta_h^{\sim m})\ \frac{1}{2}\ \beta' \succ (\beta',\beta_h^{\sim m})\ \frac{1}{2}\ \beta' \sim (\beta',\beta_h^{\sim m})\ \frac{1}{2}\ \beta$, et de l'axiome 2 que

$$(\beta\ \frac{1}{2}\ \beta',\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta') \succ (\beta'\ \frac{1}{2}\ \beta,\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta), \tag{8}$$

où $\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta$ désigne le (n-l)-uple de prix mixtes $\beta_h^l\ \frac{1}{2}\ \beta$, $l = 1\ldots n$, $l \neq m$.

S'il était vrai que $(\beta_h^l\ \frac{1}{2}\ \beta') \lesssim (\beta_h^l\ \frac{1}{2}\ \beta)$ s^l étant donné pour tout s^l dans S, $l \neq m$ alors le lemme 1 entraînerait

$$(\beta\ \frac{1}{2}\ \beta',\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta') \lesssim (\beta'\ \frac{1}{2}\ \beta,\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta),$$

contredisant (8). Donc,

$$\exists s^l \text{ dans } S, (\beta_h^l\ \frac{1}{2}\ \beta') \succ (\beta_h^l\ \frac{1}{2}\ \beta)\ s^l \text{ étant donné.} \tag{9}$$

Considérons le jeu constant β_h^l. Il découle à nouveau de PI que $(\beta,\beta_h^{\sim m})\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l \succ (\beta',\beta_h^{\sim m})\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l$ et de l'axiome 2 que

$$(\beta\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l,\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l) \succ (\beta'\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l,\beta_h^{\sim m}\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l). \tag{10}$$

Il découle alors de la définition 2 (i) que

$$(\beta\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l) \succ (\beta'\ \frac{1}{2}\ \beta_h^l)\ s^m \text{ étant donné.} \tag{11}$$

L'axiome 3 interdit que (9) et (11) soient tous deux vrais, et la preuve est complète. ∎

Remarque 1. Dans la preuve du lemme 2, l'axiome 2 n'est utilisé que dans le cadre des relations (8) et (10), pour conclure qu'une loterie entre un jeu quelconque et un jeu *constant* (β', β ou β_h^l) est indifférente au jeu correspondant. Cette remarque est invoquée à la section 5.

Pour faire apparaître les probabilités subjectives, il faut exclure le cas dégénéré d'indifférence générale entre toutes les loteries (partant entre tous les jeux et entre tous les prix).

Axiome 4. *(Non dégénérescence).* Il n'est pas vrai que $g_h \lesssim g_i$ pour tous g_h, g_i dans G.

L'ensemble B étant fini, il contient en vertu de PO un élément maximal - disons b_1 - et un élément minimal - disons b_0 - pour la préférence. En vertu de PI, pour tout β dans $\mathbb{B}$, $b_0 \lesssim \beta \lesssim b_1$. En vertu de l'axiome 3 et du lemme 1, pour tout g_h dans G, $b_0 \lesssim g_h \lesssim b_1$. Donc, $b_0 \prec b_1$ (axiome 4). Les prix b_0 et b_1, fournissent une normalisation commode pour la valeur V du théorème 1. Ces prix seront identifiés à des jeux désignés par g_0 et g_1 respectivement.

Normalisation. $V(g_0) = V(b_0) = 0, V(g_1) = V(b_1) = 1$

Théorème 2. *(Espérance morale). Sous les axiomes 2, 3 et 4, il existe une probabilité p sur S et une fonction réelle u sur B, appelée utilité indépendante des états, telles que pour tout g_h dans G, $V(g_h) = \Sigma_m p^m \ \Sigma_q \beta_h^m(b_q)u(b_q)$; p est unique et u est unique à la même transformation linéaire positive près que V.*

Preuve. Définissons l'utilité u sur B par $u(b_q) = V(b_q)$ pour tout b_q, où $V(b_q)$ est la valeur du jeu constant promettant b_q avec certitude. Sous notre normalisation, u est une application dans [0,1].

Il découle du théorème 1 et de l'axiome 2 que, pour tout β dans $\mathbb{B}$, $V(\beta) = \Sigma_q \beta(b_q)u(b_q)$[14]. La fonction V est une application sur [0,1].

Pour tout jeu g_h et tout état s^m, définissons $v_h^m := \Sigma_q \beta_h^m(b_q)u(b_q) = V(\beta_h^m)$, l'espérance d'utilité du prix mixte associé avec s^m par g_h. Pour tous g_h et s^m, v_h^m appartient à [0,1]. En vertu du lemme 2, $v_h^m \leq v_i^m$ entraîne $\beta_h^m \lesssim \beta_i^m$ s^m étant donné. En vertu du lemme 1, $v_h = v_i$ entraîne $g_h \sim g_i$, en sorte que la valeur de tout jeu g_h est déterminée avec unicité par le vecteur à n composantes des espérances d'utilité $v_h := (v_h^1 \ldots v_h^n)$.

Dès lors, il existe une fonction f, $[0,1]^n \to R$, telle que, pour tout g_h dans G, $V(g_h) = f(v_h^1 \ldots v_h^n) = f(v_h)$. En vertu de l'axiome 2, la fonction f est linéaire.

[En effet, l'axiome 2 énonce précisément que, pour tout α dans [0,1], pour tous g_h et g_i dans G, $\alpha f(v_h) + (1 - \alpha)f(v_i) = f(\alpha v_h + (1 - \alpha)v_i)$; et $f(0\ldots0) = 0$ en vertu de la Normalisation.] Il existe donc un vecteur p de R^n tel que, pour tout g_h *dans* $G, V(g_h) = \Sigma_m p^m v_h^m$.

En vertu de la Normalisation, $f(1\ldots1) = 1$, si bien que $\Sigma_m p^m = 1$. En outre, $f(1,0\ldots0) \geq 0$, si bien que $p^1 \geq 0$, et de même $p^m \geq 0$, $m = 2\ldots n$. Donc, p est une probabilité sur S et, pour tout g_h dans G.

$$V(g_h) = \sum_m p^m v_h^m = \sum_m p^m \sum_q \beta_h^m(b_q)u(b_q).$$

14. L'axiome 2 énonce que le *jeu* associant β avec chaque état, de valeur $V(\beta)$, est indifférent à la *loterie* affectant une probabilité $\beta(b_q)$ au jeu offrant b_q avec certitude ; la valeur de cette loterie est $\Sigma_q \beta(b_q) V(b_q)$, en vertu du théorème 1.

En appliquant cette formule aux jeux constants et en invoquant le théorème 1, on conclut que u est unique, à la même transformation linéaire positive près que V. En généralisant la définition de v_h^m à

$$v_h^m := \sum_q \beta_h^m(b_q) \cdot \frac{u(b_q) - u(b_0)}{u(b_1) - u(b_0)} ,$$

v_h^m dans $[0,1]$, on conclut que la fonction f, $[0,1)^n \to R$, est unique, et vérifie

$$f(v_h) = \frac{V(g_h) - V(g_0)}{V(g_1) - V(g_0)} .$$

L'unicité de p^1 découle alors de $f(1,0\ldots0) = p^1$, et de même pour $p^2\ldots p^n$. ∎

5. UN THÉORÈME D'ESPÉRANCE MORALE GÉNÉRALISÉE

L'exemple de l'introduction révèle sans ambiguïté la nécessité d'affaiblir l'axiome 2, pour étendre la théorie aux situations de risque moral. Une alternative naturelle, souvent utilisée en théorie de la décision, affirme que l'information concernant le résultat d'une épreuve aléatoire ne saurait nuire. Cette affirmation reflète l'inégalité bien connue :

$$E_x \max_{d \in D} f(x,d) \geq \max_{d \in D} E_x f(x,d) ;$$

cf., *e.g.*, Marschak (1954). Autrement dit, quand on compare une loterie *au jeu correspondant* (qui associe les mêmes prix mixtes marginaux avec les différents états, mais stipule une information plus tardive), le jeu n'est jamais préféré (strictement) à la loterie.

Axiome 5 *(Valeur de l'information).* Toute loterie est *préférée ou indifférente* au jeu correspondant ; autrement dit, pour tout γ dans Γ, $\gamma \succsim g_\gamma$.

La dichotomie « préférence stricte - indifférence » conduit à une *relation entre les jeux*, appelée *équipotence* dans Drèze (1958, 1961)[15]. Deux jeux sont équipotents si et seulement si l'information concernant le tirage d'une loterie entre eux n'a pas de valeur.

Définition 4 *(Équipotence).* Les jeux g_h et g_i sont équipotents, et l'on écrit $g_h E g_i$, si et seulement si, pour tout α dans $[0,1]$, la loterie $g_h \alpha g_i$ est *indifférente* au jeu correspondant $g_{g_h \alpha g_i}$.

Les jeux qui sont *équipotents avec tout autre jeu* jouent un rôle particulier. Suivant en cela Drèze (1961), j'appelle ces jeux « omnipotents ».

Définition 5 *(Omnipotence).* Le jeu g_h est omnipotent si et seulement si $g_h E g_i$ pour tout g_i *dans G.*

15. Le terme « équipotence » m'a été suggéré par L.J. Savage. Quoique l'équipotence ait un rapport avec « l'équivalence stratégique » - *cf* von Neumann et Morgenstern (1947, p. 245) - les deux notions sont distinctes. En particulier, l'équipotence n'est *pas* une relation d'équivalence.

En remplaçant l'axiome 2 par la condition moins restrictive de l'axiome 5, on accepte que l'information préalable concernant le tirage d'une loterie soit utile, parce qu'elle permet une ligne de conduite (une stratégie) plus flexible. Il y a néanmoins des situations où la flexibilité est inutile, parce que la même ligne de conduite serait adoptée, quel que soit le résultat du tirage. *En général*, on ne peut pas caractériser ces situations *a priori* : elles sont *révélées* par l'indifférence du décideur entre une loterie et le jeu correspondant. On peut toutefois tirer parti d'un cas particulier, lorsque les préférences sont indépendantes des états ; ce cas concerne les *jeux constants*. Si le décideur ne se soucie que des prix, n'ayant cure de l'état aussi longtemps qu'il obtient le même prix ; et si un jeu associe le même prix mixte avec tous les états, alors le décideur n'a aucune raison de vouloir influencer le cours des événements. Cette remarque est importante. Soit g_c un jeu constant, g_h un jeu quelconque, et $\gamma = g_c \alpha g_h$ une loterie entre ces jeux. L'échéance de l'information concernant le tirage de cette loterie est sans importance. En effet, dans le cadre du jeu g_γ correspondant à cette loterie, le décideur, ignorant lequel des deux jeux prévaut, pourrait toujours *agir comme si* le jeu g_h prévalait. Si g_h est tiré, la conduite adoptée était optimale ; si g_c est tiré, la même conclusion reste vraie, puisque n'importe quelle conduite était optimale pour ce jeu constant. Ce raisonnement, apparenté dans son esprit au Principe de la Chose Sûre, suggère qu'*un jeu constant devrait être équipotent avec tout autre jeu, i.e.* devrait être omnipotent (au sens des définitions 4 et 5). Ce principe éminemment raisonnable est introduit par l'axiome 6.

Axiome 6. *(Constance vaut omnipotence)*. Tout jeu constant est omnipotent.

Théorème 3. *(Espérance morale généralisée). Sous les axiomes 3 à 6, il existe un ensemble convexe fermé P de probabilités sur S, et une utilité indépendante des états u sur B, tels que, pour tout g_h dans G,*

$$V(g_h) = \max_{p \in P} \sum_m p^m \sum_q \beta_h^m(b_q) u(b_q) \ ;$$

P est unique et u est unique, à la même transformation linéaire positive près que V.

Preuve

(1) Tout comme à la preuve du théorème 2, on définit l'utilité u de façon unique (sous la Normalisation) par $u(b_q) = V(b_q)$. Parce que tous les jeux constants sont omnipotents, le théorème 1 implique encore que, pour tout β dans $\mathbb{B}$, $V(\beta) = \Sigma_q \beta(b_q) u(b_q)$. On définit l'espérance d'utilité du prix mixte associé avec l'état s^m par le jeu g_h comme $v_h^m := \Sigma_q \beta_h^m(b_q) u(b_q)$. En vertu de la remarque 1, on peut substituer l'axiome 6 à l'axiome 2 dans l'énoncé du lemme 2, et invoquer ce lemme. Donc, $v_h^m \leq v_i^m$ entraîne toujours $\beta_h^m \precsim \beta_i^m$ s^m étant donné. En vertu du lemme 1, il existe de même une fonction définie de façon unique $f, [0,1]^n \rightarrow R$, telle que pour tout g_h dans G, $V(g_h) = f(v_h^1 \ldots v_h^n) = f(v_h)$.

(2) En vertu de l'axiome 5, la fonction f est convexe. En effet cet axiome énonce précisément que, pour tout α dans $[0,1]$, pour tout g_h et g_i dans G, $\alpha f(v_h) + (1 - \alpha) f(v_i) \geq f(\alpha(v_h) + (1 - \alpha) v_i)$.

La fonction f est homogène de degré 1. En effet, le jeu constant g_0 pour lequel $v_0 = (0\ldots0)$ est omnipotent, si bien que pour tout g_h dans G, pour tout α dans $[0,1]$, $\alpha f(v_h) + (1-\alpha)f(v_0) = \alpha f(v_h) = f(\alpha(v_h) + (1-\alpha)v_0) = f(\alpha v_h)$. De plus, si $k > 1$ vérifie $kv_h \leq \iota$, $(\frac{1}{k})f(kv_h) = f(v_h)$[16]. La fonction f est continue.[17] Donc, f est une fonction convexe, bornée, fermée et positivement homogène. Par le corollaire 13.2.1 de Rockafellar (1970, p. 114), f est support d'un ensemble convexe fermé P^*, défini de façon unique, à savoir

$$P^* = \{p \in R^n \mid \forall v \in [0,1]^n : p \cdot v \leq f(v)\}.$$

Dès lors,

$$f(v) = \sup_{p \in P^*} p \cdot v.$$

(3) Soit P défini de façon unique par $P = P^* \cap \Delta^n$, où Δ^n désigne le simplexe unité de R^n_+. P est un ensemble convexe fermé de probabilités. Nous allons vérifier, en trois étapes élémentaires, que pour tout g_h dans G, il existe un p dans P tel que $f(v_h) = p \cdot v_h$.

(i) Pour le jeu g_1, on a $v_1 = \iota$ et $f(v_1) = \sup_{p \in P^*} p \cdot \iota = 1$, en sorte que $p \cdot \iota \leq 1$ pour tout p dans P^*.

Pour le jeu $(\beta^m_1, \beta^{\sim m}_0)$, on a $v((\beta^m_1, \beta^{\sim m}_0)) = \delta^m$ et $f(\delta^m) = \sup_{p \in P^*} p^m \leq 1$, en sorte que $p^m \leq 1$ pour tout $m = 1\ldots n$, pour tout p dans P^*.

Parce que P^* est fermé, et f continue, soit $\sup_{p \in P^*} p \cdot v$ est atteint comme $\max_{p \in P^*} p \cdot v$ à une valeur finie de p dans P^*, soit le sup correspond à $v^m = 0$ avec $p^m = -\infty$ pour quelque(s) état(s) s^m.

(ii) Pour un jeu quelconque g_h, on forme les loteries $g_h \alpha g_1, \alpha \in (0,1)$, et on considère les jeux correspondants $g_{g_h \alpha g_1}$. Parce que $\alpha v_h + (1-\alpha)\iota$ est un vecteur strictement positif, $V(g_{g_h \alpha g_1}) = f(\alpha v_h + (1-\alpha)\iota) = \max_{p \in P^*} p \cdot (\alpha v_h + (1-\alpha)\iota)$. Soit p_α un élément de P^* pour lequel le max est atteint. Parce que g_1 est omnipotent (constant), $g_{g_h \alpha g_1} \sim g_h \alpha g_1$. Donc,

$$\begin{aligned} V(g_{g_h \alpha g_1}) &= \alpha p_\alpha \cdot v_h + (1-\alpha) p_\alpha \cdot \iota = \alpha V(g_h) + (1-\alpha) V(g_1) \\ &= \alpha \sup_{p \in P^*} p \cdot v_h + 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Parce que $\sup_{p \in P^*} p \cdot v_h \geq p_\alpha \cdot v_h$, et $1 \geq p_\alpha \cdot \iota$, on doit avoir $p_\alpha \cdot v_h = \sup_{p \in P^*} p \cdot v_h$ et $p_\alpha \cdot \iota = 1$. Donc, il existe p_α dans P^* avec $p_\alpha \cdot \iota = 1$ tel que $V(g_h) = f(v_h) = p_\alpha \cdot v_h$.

(iii) Pour le jeu $(\beta^m_0, \beta^{\sim m}_1)$, on a $v((\beta^m_0, \beta^{\sim m}_1)) = \iota - \delta^m$ et $f(\iota - \delta^m) = \sup_{p \in P^*} p \cdot (\iota - \delta^m) = 1 - \inf_{p \in P^*} p^m \leq 1$, de telle sorte que $p^m \geq 0$ pour tout $m = 1\ldots n$, pour tout p dans P^*.

---

16. Cet alinéa correspond au lemme de Anscombe et Aumann (1963, p. 202).

17. Au risque de passer pour pédant : pour un v_h quelconque, si $| v^m_i - v^m_h | \leq \epsilon$ pour tout $m = 1\ldots n$, alors $| f(v_i) - f(v_h) | \leq \epsilon$. En effet, $\min[(1+\epsilon)v^m_h, 1] \geq v^m_i \geq (1-\epsilon)v^m_h$ pour tout m entraîne $(1+\epsilon)f(v_h) \geq f(v_i) \geq (1-\epsilon)f(v_h)$.

En particulier, $p_\alpha \geq 0$ à l'étape (ii) en sorte que, pour tout g_h dans G, il existe $p \in P$ avec $p \cdot v_h = f(v_h) = V(g_h)$.

(4) Parce que les jeux constants sont omnipotents, si bien que l'axiome 2 s'applique aux loteries entre ces jeux, il découle toujours du théorème 1 que u est unique, à la même transformation linéaire positive près que V. Généralisant à nouveau la définition de v_h^m en

$$v_h^m := \sum_q \beta_h^m(b_q) \frac{u(b_q) - u(b_0)}{u(b_1) - u(b_0)},$$

v_h^m dans $[0,1]$, la fonction f est unique et il en va de même pour P^*. ■

Le théorème 3 réalise l'objectif défini dans l'introduction, à savoir l'extension du principe de l'espérance morale (ou espérance subjective d'utilité) du domaine des jeux contre la nature au domaine du risque moral. Comme annoncé dans l'introduction, cette extension est permise par un affaiblissement naturel de l'axiome 2 - remplacé par les axiomes 5 et 6. Le théorème prouve l'existence d'un ensemble convexe fermé de probabilités (P), défini de façon unique, intuitivement associé à un ensemble de stratégies non observables. Les préférences entre les jeux se conforment à une représentation en termes d'espérances d'utilité, calculées pour chaque jeu à partir d'un élément de P qui rend cette espérance maximale (espérance morale « généralisée »).

La convexité de P peut s'interpréter comme reflètant l'accès à des stratégies mixtes. Si le décideur a accès (grâce à des stratégies appropriées) aux probabilités p et p' dans P, il a accès par mélange aléatoire à toutes les combinaisons convexes de p et p'. Deux autres propriétés de l'ensemble P présentent un intérêt, tant en elles-mêmes que pour l'élicitation (de P lui-même, et d'une utilité liée aux états). Une première propriété concerne la *dimension* de P, c'est-à-dire le nombre maximal d'éléments linéairement indépendants appartenant à P. Une seconde propriété concerne la *cardinalité de l'ensemble des points extrêmes* de P, qui est finie si et seulement si P est une polyèdre (engendré par un ensemble fini de probabilités, correspondant à des « stratégies pures »). Lorsque P est un polyèdre, des simplifications utiles apparaissent. Les deux propriétés sont analysées dans Drèze (1987), où il est montré que l'identification d'une utilité liée aux états est possible, si et seulement si P contient un nombre d'éléments linéairement indépendants égal au nombre des états.

BIBLIOGRAPHIE

ANSCOMBE, F.J. et R.J. AUMANN (1963), « A Definition of Subjective Probability », *Mathematical Statistics*, 43, 199-205.

ARROW, K.J. (1965), *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Yrjö Jahnssonin Säätiö, Helsinki.

DIONNE, G. (1982), « Moral Hazard and State-Dependent Utility Function », *Journal of Risk and Insurance*, pp. 405-422.

DRÈZE, J.H. (1958), « Individual Decision Making under Partially Controllable Uncertainty », Unpublished Ph.D. Thesis, Columbia University, New York.

DRÈZE, J.H. (1961), « Les fondements logiques de l'utilité cardinale et de la probabilité subjective » in *La Décision*, Colloques Internationaux du CNRS, Paris, pp. 73-87.

DRÈZE, J.H. (1987), « Decision Theory with Moral Hazard and State-Dependent Preferences », pp. 23-89 in Drèze (1987 b).

DRÈZE, J.H. (1987b), *Essays on Economic Decisions under Uncertainty*, Cambridge, Cambridge University Press.

FISHBURN, P.C. (1982), *The Foundations of Expected Utility*, Reidel, Dordrecht.

LUCE, D.C. et H. RAIFFA (1958), *Games and Decisions*, Wiley, New York.

MARSCHAK, J. (1954), « Towards and Economic Theory of Organisation and Information » in *Decision Processes*, Coombs et Davis, eds., Wiley, New York.

ROCKAFELLAR, R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton N.J.

SAVAGE, L.J. (1954), *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

VON NEUMANN, J. et O. MORGENSTERN (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ème édition, Princeton University Press, Princeton, N.J.